Universidad Simón Bolívar

Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Septiembre-Diciembre 2017

Nombre: ______________________________

Carné: ____________________ Sección: ________

2do Parcial de Matemáticas VII. Bloque B.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER: $f(x) \overset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \hat{f}(\omega) \quad (a, x, \omega \in \mathbb{R},\ c > 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C})$

La expresión $1_{(-c,c)}(x)$ indica la función que vale 1 para $-c < x < c$ y vale 0 en cualquier otro caso.

Definiciones

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega$$

$$\mathcal{F}\Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)(\omega) = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$$

Reglas operacionales

$f(x-a)$	$\to$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\to$	$\hat{f}(\omega - a)$
$f(ax)$	$\to$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}(\omega/a)$
$f_{\text{gen}}^{(n)}(x)$	$\to$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
$x^n f(x)$	$\to$	$i^n \hat{f}_{\text{gen}}^{(n)}(\omega)$
e^{-cx^2}	$\to$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi c}}e^{-\frac{\omega^2}{4c}}$

Algunas transformadas

$\frac{1}{c^2+x^2}$	$\to$	$\frac{1}{2c}e^{-c\lvert\omega\rvert}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$\to$	$\frac{c}{\pi(c^2+\omega^2)}$
$\frac{\operatorname{sen}(cx)}{x}$	$\to$	$\left(\frac{1}{2}\right) 1_{(-c,c)}(\omega)$
$1_{(-c,c)}(x)$	$\to$	$\frac{\operatorname{sen}(c\,\omega)}{\pi\omega}$
1	$\to$	$\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$\to$	$\frac{1}{2\pi}$
$f(x)g(x)$	$\to$	$\left(\hat{f} * \hat{g}\right)(\omega)$

1. [Total: 12 puntos] Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{2}x\lvert x\rvert$, definida en $\mathrm{Dom}(f) = [-\pi, \pi]$.
   (a) [6 puntos] Halle la serie de Fourier de f.
   (b) [6 puntos] Sabiendo que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$, halle el valor al que converge la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$.

2. [13 puntos] Halle una función $u(x,t)$ que satisfaga la ecuación $u_{tt} - u_{xx} + u = 0$ (para $0 < x < \pi$ y $t > 0$) junto con las condiciones $\begin{cases} u(0,t) = 0 \quad , \quad u(\pi,t) = 0 \quad (\text{para } t > 0) \\ u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = 0 \quad (0 < x < \pi) \end{cases}$, siendo $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & \text{si } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$.

3. [Total: 12 puntos] Considere la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } \lvert x\rvert \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \lvert x\rvert > \frac{\pi}{2} \end{cases}$.
   (a) [4 puntos] Calcule la transformada de Fourier de f.
   (b) [4 puntos] Halle el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (c) [4 puntos] Calcule el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

4. [13 puntos] Considere la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Encuentre una función $u(x,t)$, definida para $0 \le x$ y $0 < t$, que satisfaga la ecuación $u_t = u_{xx}$ y las condiciones $u_x(0,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$.

¡Justifique todas sus respuestas!